

UNIVERSITÄT TÜBINGEN

PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM II

TR

---

# Transformator

---

*Von:*

Shiphrah Rowlands

Jan Riedelsheimer

Simon Fischer

*Betreuung:*

T. Hehl

10. Dezember 2021

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theoretischer Hintergrund</b>	<b>1</b>
2.1	Zeigerdiagramm . . . . .	1
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Ergebnisse &amp; Auswertung</b>	<b>2</b>
4.1	Aufgabe 4 - Messungen im Leerlauf . . . . .	2
4.2	Aufgabe 5 - Messungen bei $U_1 = 39V$ . . . . .	4
4.2.1	Zusatzfrage: Flussspannung . . . . .	7
4.3	Aufgabe 6 . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Fragen zur Auswertung</b>	<b>10</b>
5.1	Wie wirkt sich eine Änderung der Windungszahlen (bei gleichem Übersetzungsverhältnis) auf die Verluste aus? Wovon hängt die optimale Windungszahl ab? . . . . .	10
5.2	Welchen Einfluss hat der Querschnitt des Eisenkerns sowie seine Form? . . . . .	10
5.3	Welchen Effekt hat ein Luftspalt im Trafokern? . . . . .	10
5.4	Bei welcher Last $R_L$ wird der Wirkungsgrad maximal und wie groß ist er dann? Vergleichen Sie diesen Wert mit Ihren Messungen. In welchem Verhältnis stehen dann Kupfer und Eisenverluste? . . . . .	10
5.5	Die verwendeten Transformatoren sind alle für Netzspannung (230 V) ausgelegt. Berechnen Sie aus den gemessenen Parametern die Wärmeentwicklung unter Netzspannung bei maximalem Wirkungsgrad sowie bei maximaler Sekundärleistung! . . . . .	11
5.6	Wie funktioniert ein Schaltnetzteil? . . . . .	12

# 1 Motivation

Ziel ist es, den Transformator zu untersuchen. Es werden die Kenngrößen bestimmt und Fragen zur Auswertung beantwortet. Transformatoren spielen eine besonders wichtige Rolle bei der Übertragung von elektrischer Energie, besonders über große Distanzen hinweg. Sie werden vorwiegend beim Hoch- oder Heruntertransformieren von Spannungen im Bezug auf Hochspannungsleitungen eingesetzt, um Verluste zu minimieren.

## 2 Theoretischer Hintergrund

Für die Herleitung der Relationen wird die folgende Ersatzschaltung (Abbildung 1) verwendet, das die Eigenschaften eines Transformators modelliert. Wir verwenden ein Ersatzschaltbild, um die Rechnungen zu vereinfachen.

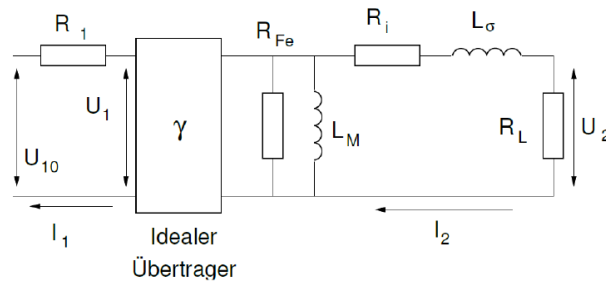


Abbildung 1: Ersatzschaltbild zum Transformator

### 2.1 Zeigerdiagramm

Mithilfe der Darstellung der Ströme und Spannungen im Zeigerdiagramm in Abbildung 2, kann man sehen, dass  $I_1' = I_M + I_{Fe}$ , da  $I_2$  im Leerlauf verschwindet.

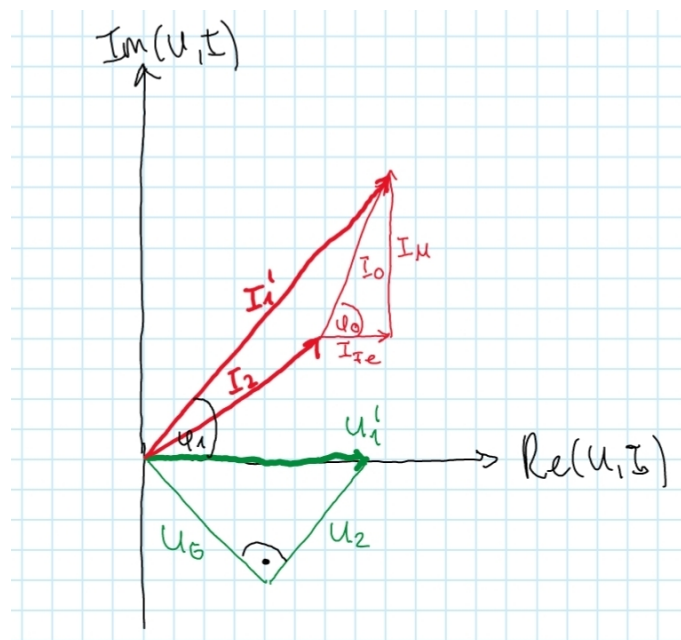


Abbildung 2: Zeigerdiagramm

### 3 Durchführung

Der Versuch *Transformator* umfasst drei kleinere Versuche bei denen der Transformator im Leerlauf, bei konstanter Primärspannung  $U_1$  und bei konstantem Vorwiderstand  $R_1$  betrachtet wird.

Bei der Messung im Leerlauf wurde die Primärspannung  $U_1$  geändert und dabei die Größen  $I_1, U_2$  und  $\phi_1$  gemessen.

Bei der zweiten Messung wurde die Primärspannung  $U_1$  konstant bei 39 V gehalten und dabei dann die Größen  $U_2, I_2, U_\phi, U_1, \phi$  gemessen.

In der dritten Messung wurde der Innenwiderstand  $R_i$  bei 400  $\Omega$  konstant gehalten und dabei wieder dieselben Größen gemessen.

## 4 Ergebnisse & Auswertung

### 4.1 Aufgabe 4 - Messungen im Leerlauf

Im Leerlauf wurden nun bei variiert Primärspannung  $U_1$  die Größen  $U_2, I_1$  und  $\phi_1$  aufgenommen. In Abbildung 3 sind die gemessenen Größen in Abhängigkeit von der Primärspannung aufgetragen.

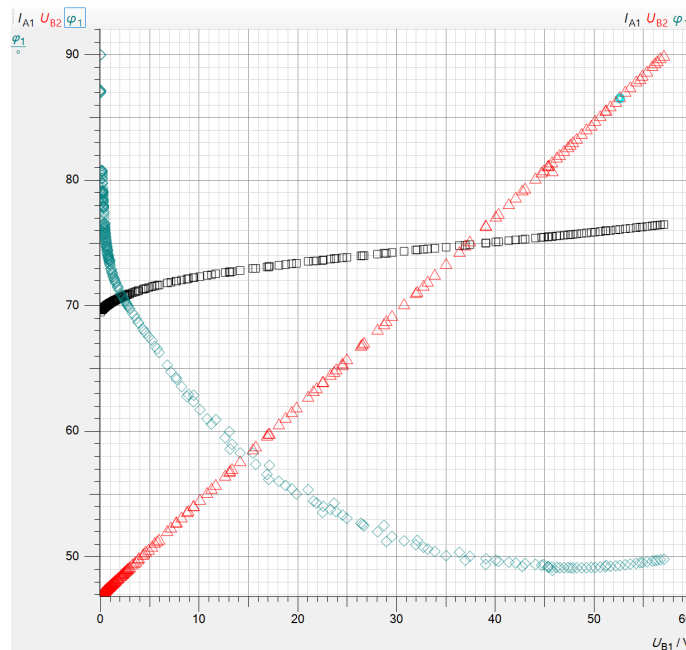


Abbildung 3:  $I_1, U_2$  und  $\phi_1$  in Abhängigkeit von  $U_1$

Das Übersetzungsverhältnis  $\gamma$  berechnet sich dann im Leerlauf zu

$$\gamma = \frac{U_1}{U_2} = 10.0033 \pm 0.0018. \quad (1)$$

Wobei sich der Wert für  $U_2$  aus der Steigung der Ausgleichsgeraden von  $U_2(U_1)$  ergibt. Der Eisenwiderstand  $R_{Fe}$  und die Hauptinduktivität  $L_M$  lassen sich dann aus den Messwerten bei  $U_1 = 39$  V ablesen:

$$R_{Fe} = 82.11 \Omega \quad (2)$$

$$L_M = 0.224 \text{ Hz} \quad (3)$$

Betrachtet man nun den Eisenwiderstand  $R_{Fe}$  in Abhängigkeit von  $U_1$ , so gilt die folgende Beziehung:

$$R_{Fe} = \frac{U_2}{I_{Fe}} = \frac{U_2}{\gamma I_1 \cos(\phi)} \quad (4)$$

Für die Hauptinduktivität  $L_M$  gilt dann, unter Verwendung der Definition des komplexen Wechselstroms und aus der Tatsache, dass für  $I_2 = 0$  der Spulenstrom  $I_M$  nichts anderes als die Projektion des transformierten Stroms auf die komplexe Achse ist, folgende Beziehung:

$$L_M = \frac{U_2}{\omega I_1' \sin(\phi)} = \frac{U_2}{2\pi f I_1 \gamma \sin(\phi)}, \quad (5)$$

wobei  $f$  für die Frequenz des Wechselstroms steht. Damit lassen sich dann in Abhängigkeit von  $U_1$  die Werte für den Eisenwiderstand und der Hauptinduktivität berechnen, wie sie im folgenden Diagramm aufgetragen sind.

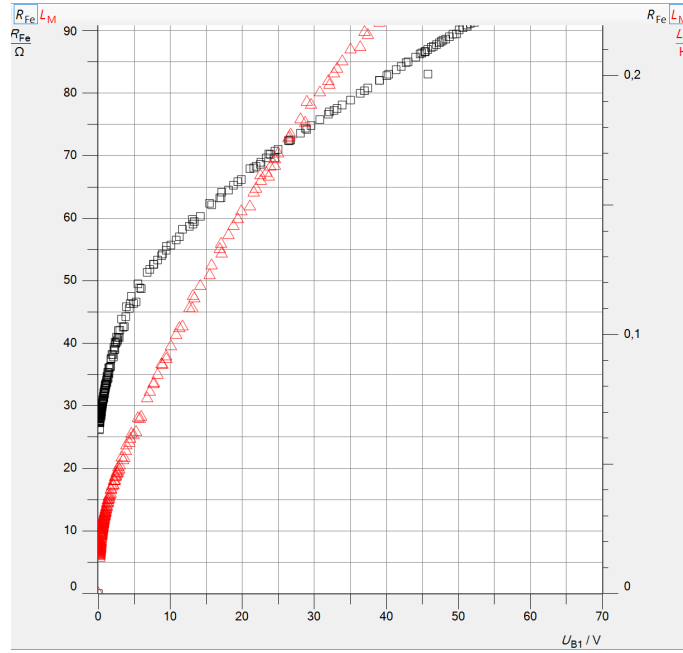


Abbildung 4:  $R_{Fe}$  und  $L_M$  als Funktion von  $U_1$

Mit der Relation (4) für den Eisenwiderstand

$$R_{Fe} = \frac{U_2}{\gamma I_1 \cos(\phi)} \quad (6)$$

lässt sich die Phase  $\phi$  berechnen zu

$$\phi_{1,0} = 49.89^\circ. \quad (7)$$

Die Größen im Leerlauf bei  $U_1 = 39V$  sind nocheinmal in Abbildung 3 zusammengefasst.

Größe	Werte
$\gamma$	10.0033
$\phi_{1,0}$	49.89 °
$R_{Fe}$	82.11
$L_M$	0.224 Hz

Tabelle 1: 4 Zusammenfassung

Nun sollten noch der Blindstromanteil ( $I_1 \cdot \sin \phi$ ) und der Wirkstromanteil ( $I_1 \cdot \cos \phi$ ) im Leerlauf bei  $U_1 = 39V$  bestimmt werden. Man erhält folgende Werte:

Blindstromanteil	5.64 mA
Wirkstromanteil	4.75 mA

Tabelle 2: Blind- und Wirkstromanteile

## 4.2 Aufgabe 5 - Messungen bei $U_1 = 39V$

In dieser Messeihe wurde  $U_1 = 39V$  konstant gehalten.

Untenstehend sind die Größen  $U_2$ ,  $I_1$  und  $\phi_1$  als Funktion des Sekundärstroms  $I_2$  aufgetragen.

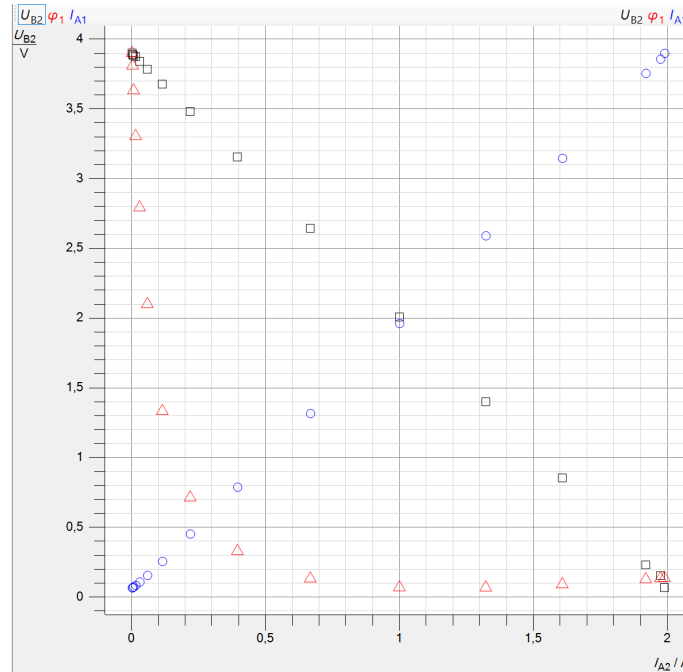


Abbildung 5:  $U_2$ ,  $I_1$  und  $\phi_1$  als Funktion des Sekundärstroms  $I_2$

Der Innenwiderstand lässt sich dann aus der Steigung der Ausgleichsgeraden von  $U_2(I_2)$  aus Abbildung 5 über das Ohm'sche Gesetz ermitteln

$$R_i = 1.91. \quad (8)$$

Der theoretische Zusammenhang von  $\phi$  und  $I_2$  ist in folgender Abbildung zu sehen.

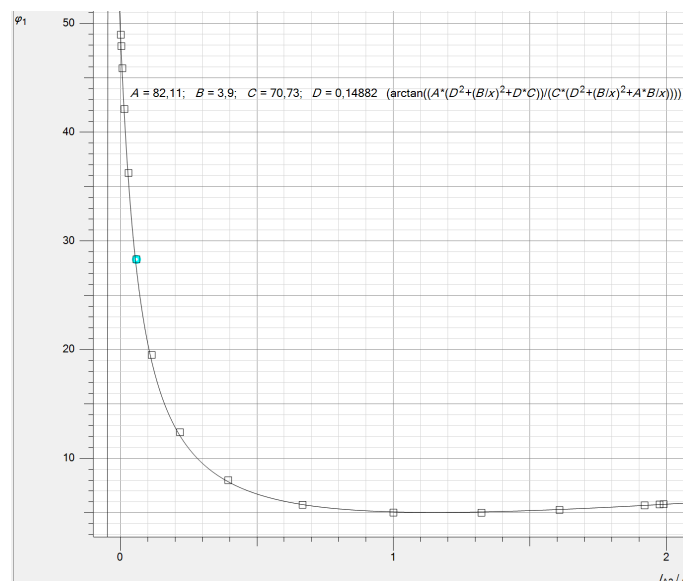


Abbildung 6:  $\phi$  als Funktion von  $I_2$

Dabei wurde die theoretische Kurve in CASSY wie folgt gefittet:

$$\phi = \arctan \left( \frac{R_{Fe} \left( (\omega L_\sigma)^2 + \left( \frac{U_1}{\sigma I_2} \right)^2 + \omega^2 L_\sigma L_M \right)}{\omega L_M \left( (\omega L_\sigma)^2 + \left( \frac{U_1}{\sigma I_2} \right)^2 + R_{Fe} \frac{U_1}{\gamma I_2} \right)} \right) \quad (9)$$

Welches sich aus dem Ersatzschaltbild 1 mit  $\tan \phi = \frac{Im(Z)}{Re(Z)}$  wie folgt ergibt:  
Für die Steuinduktivität, wird zunächst die Admittanz  $Y$  der Sekundärseite der Schaltung

$$Y = \frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{i\omega L_M} + \frac{1}{R_i + i\omega L_\sigma + R_L} \quad (10)$$

unter Verwendung von  $\frac{U_1}{\gamma I_2} = R_L + R_i$  zu

$$Y = \frac{1}{R_{Fe}} + \frac{\frac{U_1}{\gamma I_2}}{(\omega L_\sigma)^2 + \left( \frac{U_1}{\gamma I_2} \right)^2} + i \left( -\frac{1}{\omega L_M} - \frac{\omega L_\sigma}{(\omega L_\sigma)^2 + \left( \frac{U_1}{\gamma I_2} \right)^2} \right). \quad (11)$$

Hieraus lässt sich dann der Phasenwinkel berechnen. Bei dem CASSY Fit werden A,B und C als Konstanten ebehandelt und D als freier Parameter, wie folgt:

$$A = R_{Fe} \quad (12)$$

$$B = \frac{U_1}{\sigma} \quad (13)$$

$$x = I_2 \quad (14)$$

$$C = \omega L_M \quad (15)$$

$$D = \omega L_\sigma \quad (16)$$

genau die Streuinduktivität  $L_\sigma$  berechnen. Dies geschieht durch einen Fit von CASSY in 6, wo  $D$  bestimmt wurde. Somit berechnet sich die Streuinduktivität unter der Verwendung von gegebener Frequenz zu

$$L_\sigma = \frac{D}{\omega} \approx \frac{0.14882}{\omega} = \frac{0.14882}{100\pi} = 0.471\text{mH}. \quad (17)$$

Der Wirkungsgrad  $\eta$ , in Abhängigkeit der Leistung  $P_2(R_L)$ , ist als Fit neben den Messwerten unten aufgetragen.

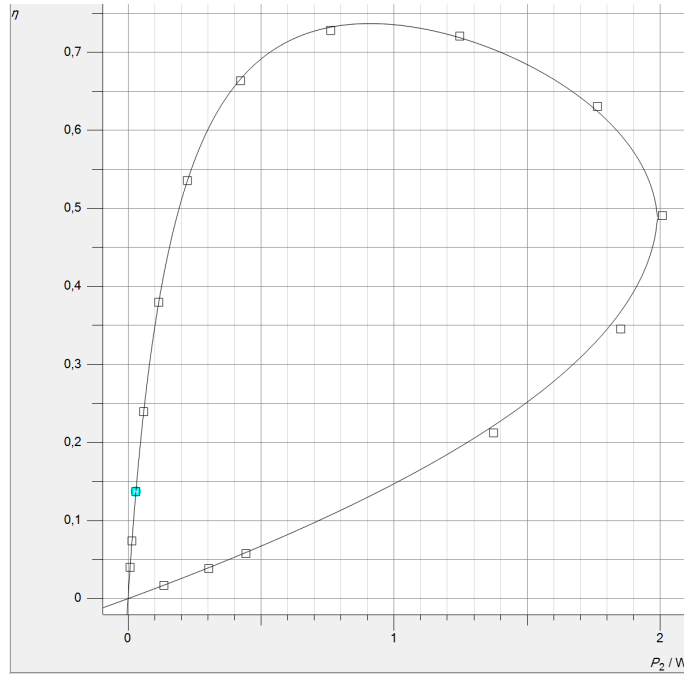


Abbildung 7: Wirkungsgrad  $\eta$  und Leistung  $P_2(R_L)$

Der theoretische Verlauf wurde dabei wie folgt eingezeichnet. Aus dem Ersatzschaldbild 1 ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 I_2}{U_1 I_{1,W}} \quad (18)$$

$$U_2 = U_1 \frac{R_L}{R_i + R_L} \quad (19)$$

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_{Fe} || (R_i + R_L)} = \frac{U_1^2 (R_{Fe} + R_i + R_L)}{R_{Fe} (R_i + R_L)} \quad (20)$$

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_L} = \frac{U_1^2 R_L}{(R_i + R_L)^2} \quad (21)$$

$$\eta = \frac{R_L R_{Fe}}{(R_i + R_L)(R_{Fe} + R_i + R_L)}. \quad (22)$$

Um in der Auswertung in Kapitel 4.2 den Wirkungsgrad auftragen zu können, muss der Parameter  $R_L$  durch  $P_2$  ersetzt werden. Man findet mit

$$R_L = \frac{P_2}{U_1^2} (R_i + R_L)^2 \quad (23)$$

$$(24)$$

eine quadratische Gleichung, welche die Lösungen

$$R_L = \frac{U_1^2}{2P_2} - R_i \pm \sqrt{\left(\frac{U_1^2}{2P_2} - R_i\right)^2 - R_i^2} \quad (25)$$

aufweist. Damit lässt sich der Wirkungsgrad in der gewünschten Form berechnen

$$\eta = \frac{1}{\frac{U_1^2}{P_2 R_{Fe}} + \frac{1}{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{R_i P_2}{U_1^2}}}}. \quad (26)$$



#### 4.2.1 Zusatzfrage: Flussspannung

Wir leiten zunächst mit Gleichung TR.4 aus der Anleitung einen Verlauf für die Flussspannung her. Dabei gilt zunächst für die konstant gehaltene Primärspannung mit Gleichung TR.4:

$$U_1 = - \left( L_{11}\dot{I}_1 + L_{21}\dot{I}_2 + L_{31}\dot{I}_3 \right) \quad (27)$$

Vernachlässigt man die Ströme durch das Messgerät, so kann man  $I_3 = 0$  setzen. Für die Flussspannung  $U_\phi$  gilt analog:

$$U_\phi = U_3 = - \left( L_{13}\dot{I}_1 + L_{23}\dot{I}_2 \right) \quad (28)$$

Formen wir Gleichung (27) nach  $\dot{I}_1$  um, dann erhalten wir für die Flussspannung:

$$U_\phi = - \left( L_{13} \frac{-U_1 - L_{21}\dot{I}_2}{L_{11}} + L_{23}\dot{I}_2 \right) \quad (29)$$

Im optimalen Fall bleibt das Übersetzungsverhältnis des Transformators gleich, daher gilt mit dem Kopplungsfaktor  $k$ :  $L_{ij} = k_{ij} \sqrt{L_{ii}L_{jj}}$ . Man erhält dann insgesamt für die Flussspannung:

$$U_\phi = k_{13} \sqrt{\frac{L_{33}}{L_{11}}} U_1 + \omega I_2 \sqrt{L_{22}L_{33}} (k_{12}k_{13} - k_{23}) \quad (30)$$

Die Gleichung von  $U_\phi$  sagt damit einen linearen Verlauf vorher. Trägt man nun die Flussspannung  $U_\phi$  in Abhängigkeit von  $I_2$  auf, so erhält man folgendes Diagramm:

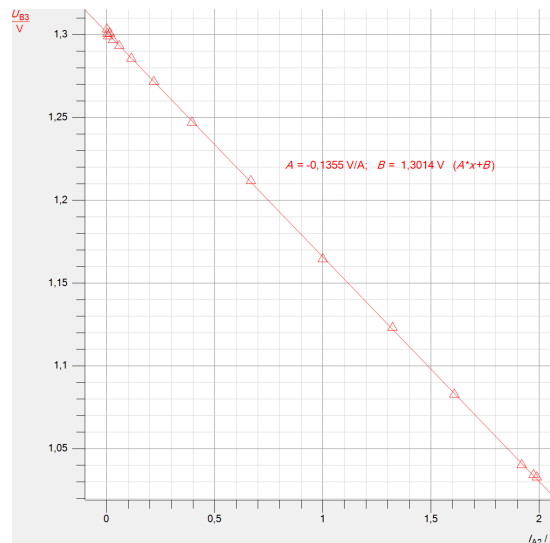


Abbildung 8: Flussspannung  $U_\phi(I_2)$

Die Flussspannung nimmt also mit zunehmenden Strom bzw. zunehmender Belastung ab. Der magnetische Fluss im Eisenkern nimmt also wie erwartet mit steigendem Sekundärstrom ab. Das Ergebnis bestätigt damit also die theoretische Vorhersage von Gleichung (30).

### 4.3 Aufgabe 6

Nun wurde der Widerstand  $R_1$  bei  $400 \, \Omega$  konstant gehalten. Dabei erhalten wir mit unseren Messwerten folgende Leistung  $P_2$  in Abhängigkeit von  $R_L$  mit dem theoretischen Verlauf:

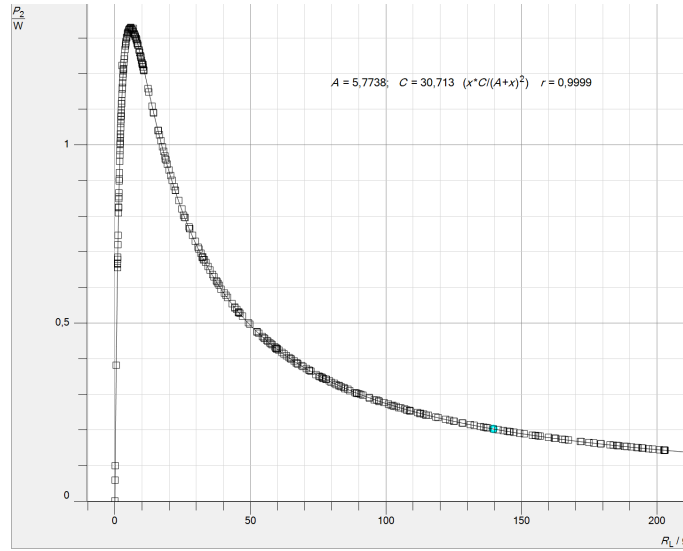


Abbildung 9: Leistung in Abhängigkeit vom Lastwiderstand

Dabei wurden in dem Versuch die Größen  $I_{A2}$  und  $U_{B2}$  gemessen und damit die Auftragung von  $P_2(R_L)$  wie folgt berechnet:

$$P_2 = I_{A2} \cdot U_{B2} \quad (31)$$

$$R_L = U_{B2}/I_{A2} \quad (32)$$

Dabei wurde die theoretische Kurve in CASSY mit folgender Gleichung für die Leistung  $P_2(R_L)$  berechnet:

$$P_2 = R_L \left( \frac{U_1}{\left(\frac{R_1}{\gamma^2} + R_I + R_L\right)} \right)^2 \quad (33)$$

Dabei wurde in CASSY Fit A und C wie folgt als freie Parameter behandelt:

$$C = U_1^2 \quad (34)$$

$$A = \frac{R_1}{\gamma^2} + R_I \quad (35)$$

Nun soll gezeigt werden, dass die von einem belasteten Transformator abgegebene Leistung maximal ist, wenn  $R_L = R_i$ . Dazu berechnen wir einfach das Maximum von  $P_2(R_L)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2(R_L)}{\partial R_L} &= \frac{\partial}{\partial R_L} R_L I_L^2 = \frac{\partial}{\partial R_L} R_L \left( \frac{U_1}{\gamma(R_i + R_L)} \right)^2 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \left( \frac{U_1}{\gamma(R_i + R_L)} \right)^2 - 2R_L \left( \frac{U_1^2}{\gamma(R_i + R_L)} \right)^3 &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow R_L = R_i \end{aligned}$$

Im Folgenden fitten wir unsere Werte für die Leistung  $P_2$  in Abhängigkeit von Lastwiderstand  $R_L$  bei unsere Messung mit der konstanten Primärspannung  $U_1 = 39V$ .

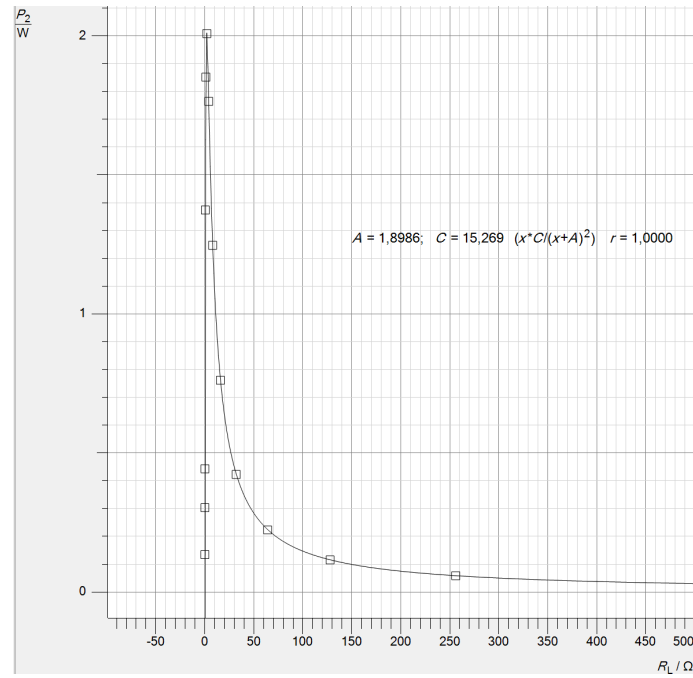


Abbildung 10: Leistung  $P_2$  in Abhängigkeit vom veränderlichen Lastwiderstand  $R_L$

Der theoretische Verlauf wieder mit Gleichung (33) berechnet bzw. gefittet wurde.

## 5 Fragen zur Auswertung

### 5.1 Wie wirkt sich eine Änderung der Windungszahlen (bei gleichem Übersetzungsverhältnis) auf die Verluste aus? Wovon hängt die optimale Windungszahl ab?

Bei einer Verringerung der Windungszahl nimmt der Wirkungsgrad eines Transformators im Allgemeinen ab. Dies liegt an einer Verringerung der Induktivitäten  $L_1, L_2$  und der damit einher gehenden Verringerung der Koppelung  $k = \frac{L_{1,2}}{L_1 \cdot L_2}$ . Dennoch nehmen die Kupferverluste und die damit verbundene Wärmeentwicklung bei geringeren Windungszahlen ab. Die optimale Windungszahl ist also Abhängig von den Anforderungen, die an den Transformator gestellt werden.

### 5.2 Welchen Einfluss hat der Querschnitt des Eisenkerns sowie seine Form?

Die Transformatorgleichung lautet:

$$U_{eff} = \sqrt{2} \cdot B_{max} A f N_2 \quad (36)$$

mit der maximalen Kern-Flussdichte  $B_{max}$ , seinem Querschnitt  $A$ , und der Frequenz  $f$ . Damit ist klar, dass sowohl die Kernform als auch die Bauart Einfluss auf die Induktionsspannung haben. So kann beispielsweise durch Verhindern von Wirbelströmen die maximale Flussdichte im Kern erhöht werden.

### 5.3 Welchen Effekt hat ein Luftspalt im Trafokern?

Eisenkerne mit Luftspalt weisen eine geringere Permeabilität auf als geschlossene Kerne. Dadurch sinkt der Wirkungsgrad des Transformators, da es an der Luftspalte zu Streuverlusten kommt.

### 5.4 Bei welcher Last $R_L$ wird der Wirkungsgrad maximal und wie groß ist er dann? Vergleichen Sie diesen Wert mit Ihren Messungen. In welchem Verhältnis stehen dann Kupfer und Eisenverluste?

Um die Last bei maximalem Wirkungsgrad zu bestimmen, leiten wir  $\eta$  nach  $R_L$  ab.

$$\frac{\partial \eta}{\partial R_L} = \frac{R_{Fe} (R_i^2 + R_i R_{Fe} - R_L^2)}{((R_i + R_L) (R_{Fe} + R_i + R_L))^2} = 0 \quad (37)$$

$$\rightarrow R_{L_{max}} = \sqrt{R_i^2 + R_i R_{Fe}} \quad (38)$$

Damit gilt:

$$\eta_{max} = \frac{R_{Fe}}{2\sqrt{R_i^2 + R_i R_{Fe}} + 2R_i + R_{Fe}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{R_i^2}{R_{Fe}^2} + \frac{R_i}{R_{Fe}}} + 2\frac{R_i}{R_{Fe}} + 1} \quad (39)$$

In diesem Punkt sind  $P_{Fe}$  und  $P_i$  (unter der Annahme dass  $R_i$  sehr klein gegen  $R_{Fe}$  ist) gleich groß. Mit unseren Messwerten erhalten wir die maximale Leistung bei  $R_L = R_i = 1.91\Omega$ . Unser berechneter optimaler Wert für  $R_L$  beträgt  $R_L = 1.96\Omega$  und ist damit fast identisch zu unserem gemessenen Wert. Der Maximale Wirkungsgrad beträgt mit dem berechneten Wert für  $R_L$ :

$$\eta_{max} = 0.736 = 73.6\% \quad (40)$$

### 5.5 Die verwendeten Transformatoren sind alle für Netzspannung (230 V) ausgelegt. Berechnen Sie aus den gemessenen Parametern die Wärmeentwicklung unter Netzspannung bei maximalem Wirkungsgrad sowie bei maximaler Sekundärleistung!

Wir berechnen nun aus den gemessenen Parametern die maximale Sekundärleistung wie folgt:

$$P_W = P_{Fe} + P_i = \frac{U_1^2}{\gamma^2} \left( \frac{1}{R_{Fe}} + \frac{R_i}{(R_i + \sqrt{R_i(R_{Fe} + R_i)})^2} \right) \quad (41)$$

Durch unsere in Aufgabe 4 berechneten Eisenwiderstandswerten legen wir eine Ausgleichsgerade, um durch Extrapolation den Eisenwiderstandswert bei  $U_1 = 230V$  zu bestimmen. Im folgenden Diagramm ist unsere Ausgleichsgerade angegeben:

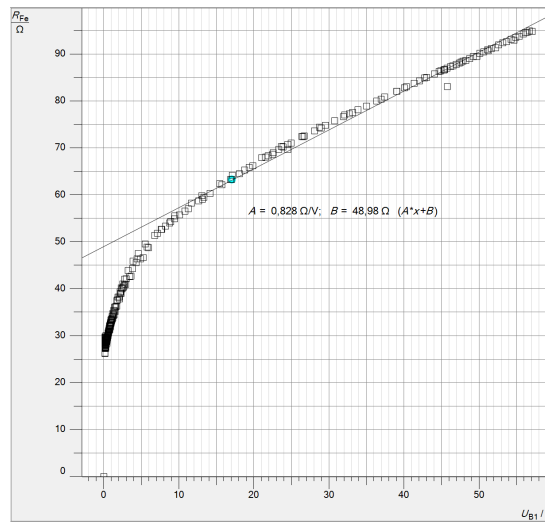


Abbildung 11: Ausgleichsgerade von  $R_{Fe}$

Man erhält dann folgenden Eisenwiderstandswert:

$$R_{Fe}(230V) = 239.42\Omega$$

Für den Innenwiderstand hatten wir zuvor  $R_i = 1.91\Omega$  berechnet. Daraus folgt dann für die maximale Sekundärleistung:

$$P_W = 4.06W$$

Für den maximalen Wirkungsgrad gilt mit folgender Gleichung:

$$\eta_{max} = \frac{1}{1 + \frac{2}{R_{Fe}}(\sqrt{R_i(R_{Fe} + R_i)} + R_i)} \quad (42)$$

Man erhält dann für den maximalen Wirkungsgrad bei  $U_1 = 230V$ :

$$\eta_{max} = 83.66\%$$

## 5.6 Wie funktioniert ein Schaltnetzteil?

Ein Schaltnetzteil wandelt Wechselspannung, meist mithilfe einer Diode, in Gleichspannung um. Danach wird diese in eine hochfrequente Wechselspannung umgewandelt. Im Anschluss wird sie meist wieder gleichgerichtet. Der wesentliche Unterschied zum Transformator ist zum einen der sehr hohe Wirkungsgrad verglichen mit dem des Transformators und zum anderen sparen sie viel Masse und Material.